Leitidee Form und Raum: Längen, Flächeninhalte und Volumina

Michael Gieding

January 27, 2017

Inhaltsverzeichnis

Was versteht man unter "‘Messen"’?

Messen bedeutet den Vergleich mit einer Einheitsgröße.

Was ist eine Größe?

- Größen sind Zahlenangaben mit Einheiten?

Was ist eine Größe?

- Größen sind Zahlenangaben mit Einheiten?
- stimmt nicht wirklich

Was ist eine Größe?

- Größen sind Zahlenangaben mit Einheiten?
- stimmt nicht wirklich
- Größen sind Elemente eines Größenbereichs

Beispiele für Größenbereiche

- Längen

Beispiele für Größenbereiche

- Längen
- Flächeninhalte

Beispiele für Größenbereiche

- Längen
- Flächeninhalte
- Volumina

Beispiele für Größenbereiche

- Längen
- Flächeninhalte
- Volumina
- Masse

Beispiele für Größenbereiche

- Längen
- Flächeninhalte
- Volumina
- Masse
- Zeit

Was kann mit Größen gemacht werden?

- Größen ein und desselben Bereichs können verglichen werden:

Was kann mit Größen gemacht werden?

- Größen ein und desselben Bereichs können verglichen werden:
- $3\,\mathrm{kg} < 7\,\mathrm{kg}$, $3\,\mathrm{m} < 3.1\,\mathrm{m}$

Was kann mit Größen gemacht werden?

- Größen ein und desselben Bereichs können verglichen werden:
- $3\,\mathrm{kg} < 7\,\mathrm{kg}$, $3\,\mathrm{m} < 3.1\,\mathrm{m}$
- Größen ein und desselben Bereiches können addiert werden:

Was kann mit Größen gemacht werden?

- Größen ein und desselben Bereichs können verglichen werden:
- $3\,\mathrm{kg} < 7\,\mathrm{kg}$, $3\,\mathrm{m} < 3.1\,\mathrm{m}$
- Größen ein und desselben Bereiches können addiert werden:
- $5.4\,\mathrm{m\,s^{-1}} + 5\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 10.4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Was kann mit Größen gemacht werden?

- Größen ein und desselben Bereichs können verglichen werden:
- $3\,\mathrm{kg} < 7\,\mathrm{kg}$, $3\,\mathrm{m} < 3.1\,\mathrm{m}$
- Größen ein und desselben Bereiches können addiert werden:
- $5.4\,\mathrm{m\,s^{-1}} + 5\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 10.4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- Größen können mit natürlichen Zahlen und Bruchzahlen vervielfacht werden:

Was kann mit Größen gemacht werden?

- Größen ein und desselben Bereichs können verglichen werden:
- $3\,\mathrm{kg} < 7\,\mathrm{kg}$, $3\,\mathrm{m} < 3.1\,\mathrm{m}$
- Größen ein und desselben Bereiches können addiert werden:
- $5.4\,\mathrm{m\,s^{-1}} + 5\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 10.4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
- Größen können mit natürlichen Zahlen und Bruchzahlen vervielfacht werden:
- $\frac{2}{3} \cdot 6\,\mathrm{l}$

Größenbereiche sind strenge Ordnungstrukturen mit Trichotomieeigenschaft

Wenn $\{G, +, <\}$ ein Größenbereich ist, dann gilt

Größenbereiche sind strenge Ordnungstrukturen mit Trichotomieeigenschaft

Wenn $\{G, +, <\}$ ein Größenbereich ist, dann gilt

- $\forall a, b, c \in G : a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ (Transitivität)

Größenbereiche sind strenge Ordnungstrukturen mit Trichotomieeigenschaft

Wenn $\{G, +, <\}$ ein Größenbereich ist, dann gilt

- $\forall a, b, c \in G : a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ (Transitivität)
- $\forall a \in G : a \not< a$ (Irreflexivität)

Größenbereiche sind strenge Ordnungstrukturen mit Trichotomieeigenschaft

Wenn $\{G, +, <\}$ ein Größenbereich ist, dann gilt

- $\forall a, b, c \in G : a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ (Transitivität)
- $\forall a \in G : a \not< a$ (Irreflexivität)
- $\forall a, b \in G$: Es gilt genau eine der folgenden Gleichungen: (Trichotomie)
    1. $a < b$
    2. $b < c$
    3. $a = b$

Jeder Größenbereich ist eine kommutative Halbgruppe

Wenn $\{G, +\}$ ein Größenbereich ist, dann gilt

Jeder Größenbereich ist eine kommutative Halbgruppe

Wenn $\{G, +\}$ ein Größenbereich ist, dann gilt

- $\forall a, b \in G : a + b \in G$ (Abgeschlossenheit)

Jeder Größenbereich ist eine kommutative Halbgruppe

Wenn $\{G, +\}$ ein Größenbereich ist, dann gilt

- $\forall a, b \in G : a + b \in G$ (Abgeschlossenheit)
- $\forall a, b, c \in G : (a + b) + c = a + (b + c)$ (Assoziativität)

Jeder Größenbereich ist eine kommutative Halbgruppe

Wenn $\{G, +\}$ ein Größenbereich ist, dann gilt

- $\forall a, b \in G : a + b \in G$ (Abgeschlossenheit)
- $\forall a, b, c \in G : (a + b) + c = a + (b + c)$ (Assoziativität)
- $\forall a, b \in G : a + b = b + a$ (Kommutativität)

Jeder Größenbereich ist eine kommutative Halbgruppe

Wenn $\{G, +\}$ ein Größenbereich ist, dann gilt

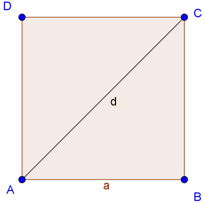
- $\forall a, b \in G : a + b \in G$ (Abgeschlossenheit)
- $\forall a, b, c \in G : (a + b) + c = a + (b + c)$ (Assoziativität)
- $\forall a, b \in G : a + b = b + a$ (Kommutativität)
- Wenn die Gleichung $a + x = b$ lösbar ist, dann ist sie eindeutig lösbar. (Regularität)

Größenbereiche sind kommensurabel

Definition:
Zwei Größen a und b sind kommensurabel zueinander, wenn es eine Größe e und zwei natürliche Zahlen m und n gibt für die gilt $m \cdot e = a \wedge n \cdot e = n$.

Größenbereiche sind per Definition kommensurabel.
Die Abstände in der reellen Zahlenebene sind demnach kein Größenbereich, weil Abstände irrationale Zahlen sein können. Betrachten wir nur positive rationale Abstände, so haben wir einen Größenbereich vorliegen.

Einschub: Seite und Diagonale eines Quadrates sind inkommensurabel zueinander



Es sei $\overline{ABCD}$ ein Quadrat. Zu den Stecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ gibt es keine Strecke e derart, dass zwei natürliche Zahlen m, n mit $m \cdot e = \overline{AB} \wedge n \cdot e = \overline{AC}$.
Einen Beweis finden Sie z.B. hier: `http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/Math_Grundlagen/Pytha.pdf`

Größenbereiche mit Teilbarkeitseigenschaft

Ein Größenbereich G hat die Teilbarkeitseigenschaft, wenn gilt:
$\forall g \in G \wedge n \in \mathbb{N} \exists g' \in G : n \cdot g' = g$

SI-Einheiten

Sie sollten die Einheiten mit Größenvorstellungen für die folgenden Größen kennen:

- Länge
- Fläche
- Volumen
- Hohlmaße (Liter etc.)
- Masse
- Gewicht
- Zeit

Hilfe finden Sie hier:
`https://de.wikipedia.org/wiki/Internationales_Einheitensystem`
Suchen Sie ferner im Internet nach Beispielen zur Erarbeitung der Einheiten.

Umfang von Rechtecken

- inhaltliche Vorstellungen
- enaktive Übungen
- ikonische Darstellungen
- Formel (symbolische Ebene)

http://www.schule-bw.de/unterricht/faecher/mathematik/3material/sek1/messen/flaeche_umfang/flaecheundumfang1.doc

Flächeninhalt von Vierecken

- inhaltliche Vorstellungen von der Idee Flächeninhalt
- Flächeninhalt von Rechtecken durch Auslegen mit Einheitsquadraten $\rightarrow$ Formel
- Herleitung der Flächeninhaltsformel für Parallelogramme
- Herleitung der Flächeninhaltsformel für Trapeze
- Herleitung der Flächeninhaltsformel für Dreiecke

Flächeninhalt und Umfang von Kreisen

- Herleitung der Umfangsformel für Kreise
- Herleitung der Flächeninhaltsformel für Kreise
- http://www.mathematik.uni-regensburg.de/Didaktik/studium_lba_rothmeier_9_Der-Kreis.pdf

Volumen

- Prinzip des Cavalieri
  https://de.wikipedia.org/wiki/Prinzip_von_Cavalieri
- physikalische Herangehensweisen
- Herleitung Volumenformel Pyramide
  http://www.schule-bw.de/unterricht/faecher/mathematik/3material/sek1/messen/pyramiden/V_Pyramide.ppt
  http://www.dms.uni-landau.de/roth/lehre/skripte/did_geometrie/cavalieri_dehn_pyramidenvolumen.pdf
- "'Herleitung"' Volumenformel Zylinder durch Analogiebetrachtungen zu den Quadern
- Herleitung der Volumenformel für Kugeln mit Cavalieri
  https://www.geogebra.org/m/rZ2TM53c